

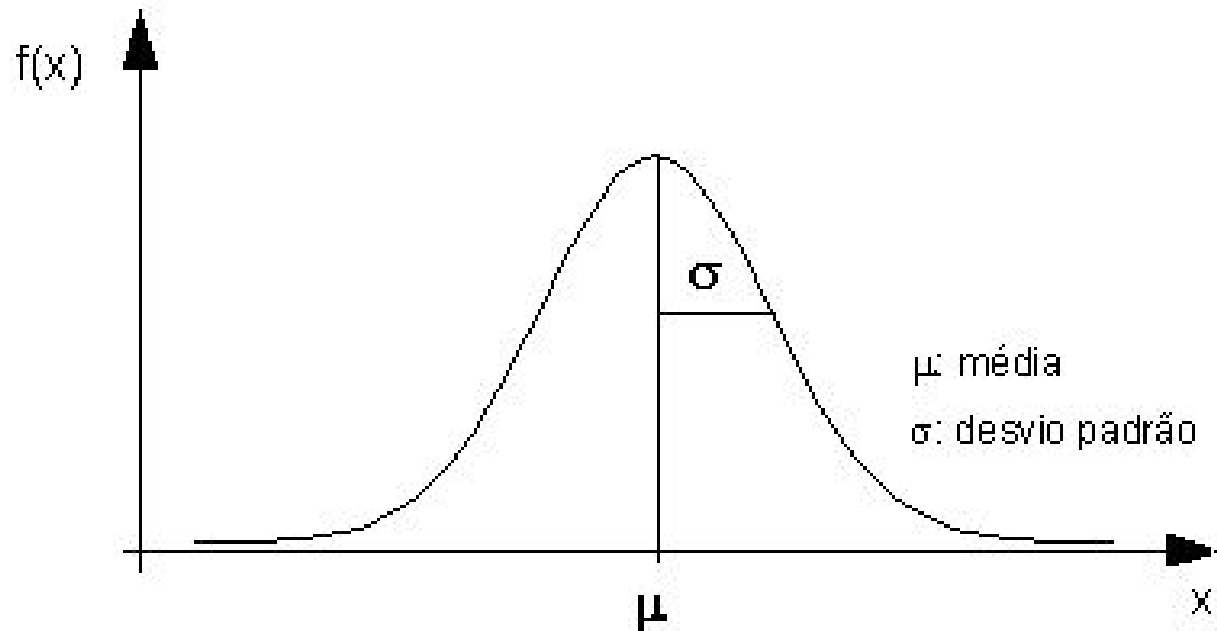
Distribuições de probabilidades de variáveis contínuas.

Profa. Cláudia de Oliveira

Distribuição Normal

- É a distribuição de probabilidade mais utilizada.
- Distribuição equilibrada, a variável apresenta valores centrais com maior frequência que os extremos.
- Os dados apresentados num histograma podem ser “transformados” numa curva em forma de sino.

Curva Normal ou de Gauss



Função densidade de probabilidade -
Distribuição normal com média μ e
desvio padrão σ

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Curva Normal ou de Gauss

Propriedades:

- é simétrica em relação à perpendicular que passa pela média.
- A área limitada pela curva e pelo eixo das abscissas é igual a 1 ou 100% .
- apresenta forma de sino, é assintótica em relação ao eixo horizontal (variação de $-\infty$ a $+\infty$).
- Existem infinitas curvas normais, de acordo com os valores σ e μ .

Importância

Por meio de **áreas** sob esta curva é possível determinar probabilidades de ocorrência dos valores de x a que se refere.

Observações

- A distribuição Normal é completamente determinada pela **média** e pelo **desvio padrão**.
- Distribuição de dados normal → a média representa bem a população.

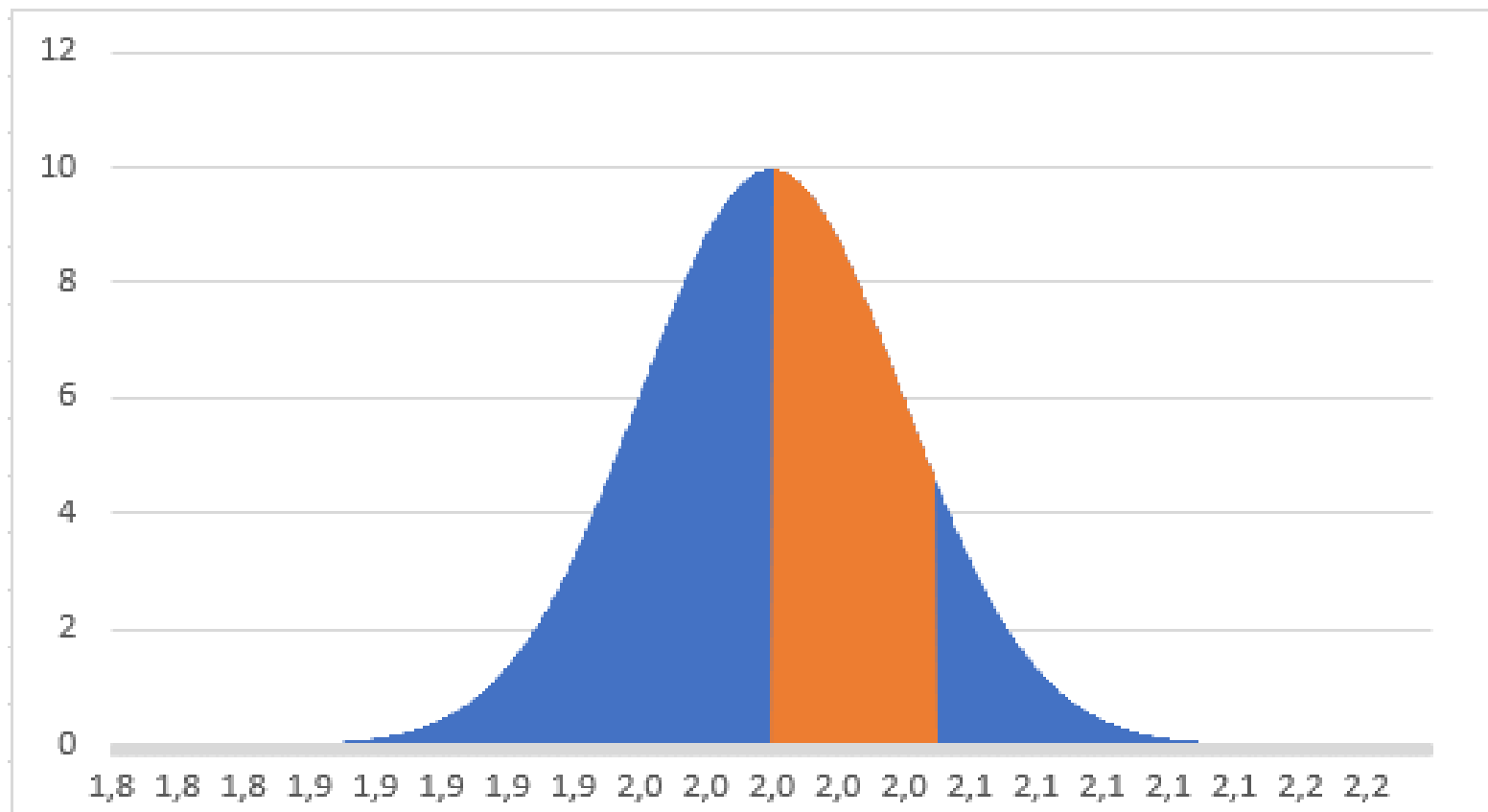
Exemplo

Suponha que os diâmetros dos parafusos produzidos por certa máquina apresentam distribuição normal com média igual a 2 cm e desvio padrão igual a 0,04 cm. Seleccionando-se aleatoriamente um parafuso, qual a probabilidade de seu diâmetro ter entre 2,00 e 2,05 cm?

Exemplo

média = 2 cm

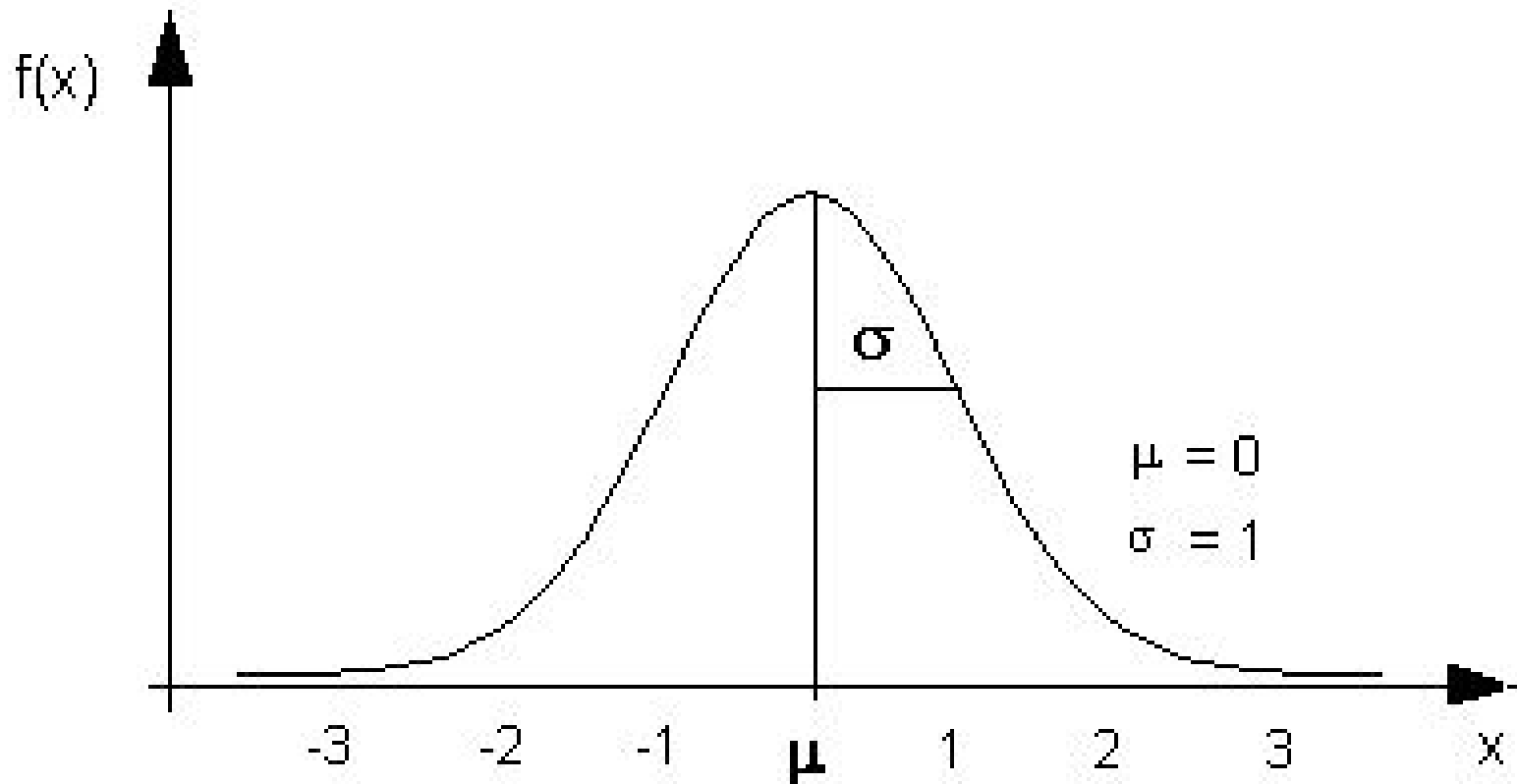
desvio padrão = 0,04 cm



Distribuição normal padronizada

- Distribuição com **média = 0** e **desvio padrão = 1**
- Variável: Z
- As áreas correspondentes a probabilidades encontram-se numa tabela que fornece a probabilidade de Z tomar qualquer valor entre a média 0 e um dado valor z .

Curva normal padronizada



Curva normal padronizada

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$$

Conversão

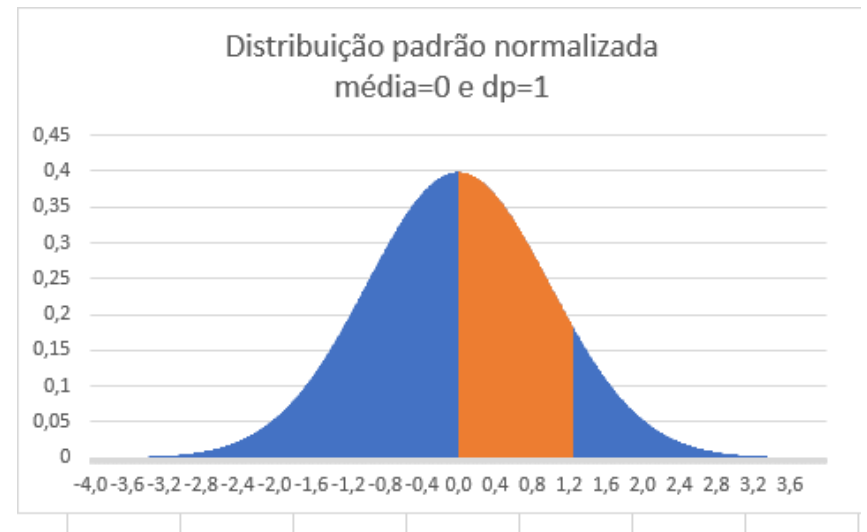
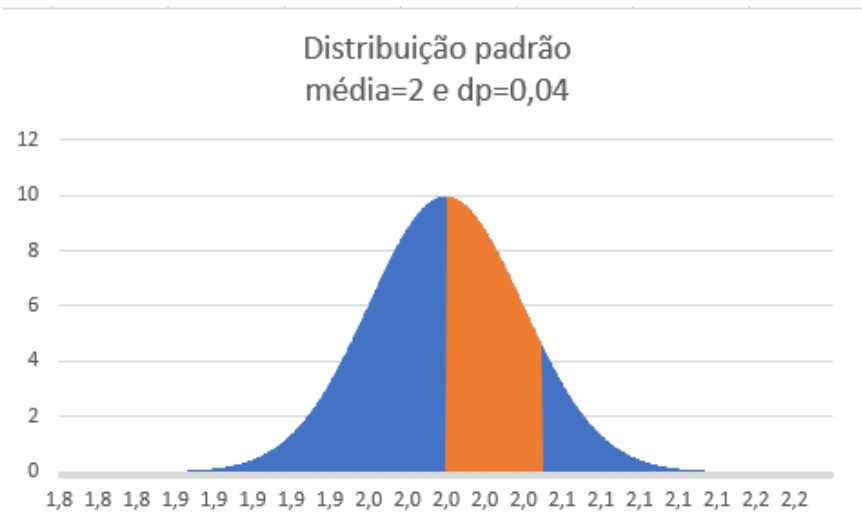
Conversão de uma variável X com distribuição normal arbitrária para a distribuição normal padrão (Z)

$$z = \frac{x - \textit{média}}{\textit{desvio padrão}}$$

ou

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Solução do exemplo



$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Solução

Dados: Distribuição normal, $\mu = 2cm$, $\sigma = 0,04cm$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow z = \frac{x-2}{0,04}$$

$$x = 2,0 \rightarrow z = \frac{2-2}{0,04} = 0$$

$$x = 2,05 \rightarrow z = \frac{2,05-2}{0,04} = 1,25$$

Área entre 0 e 1,25: 0,3944 (ver tabela)

Probabilidade: $p = 39,44\%$

Características da Curva Normal

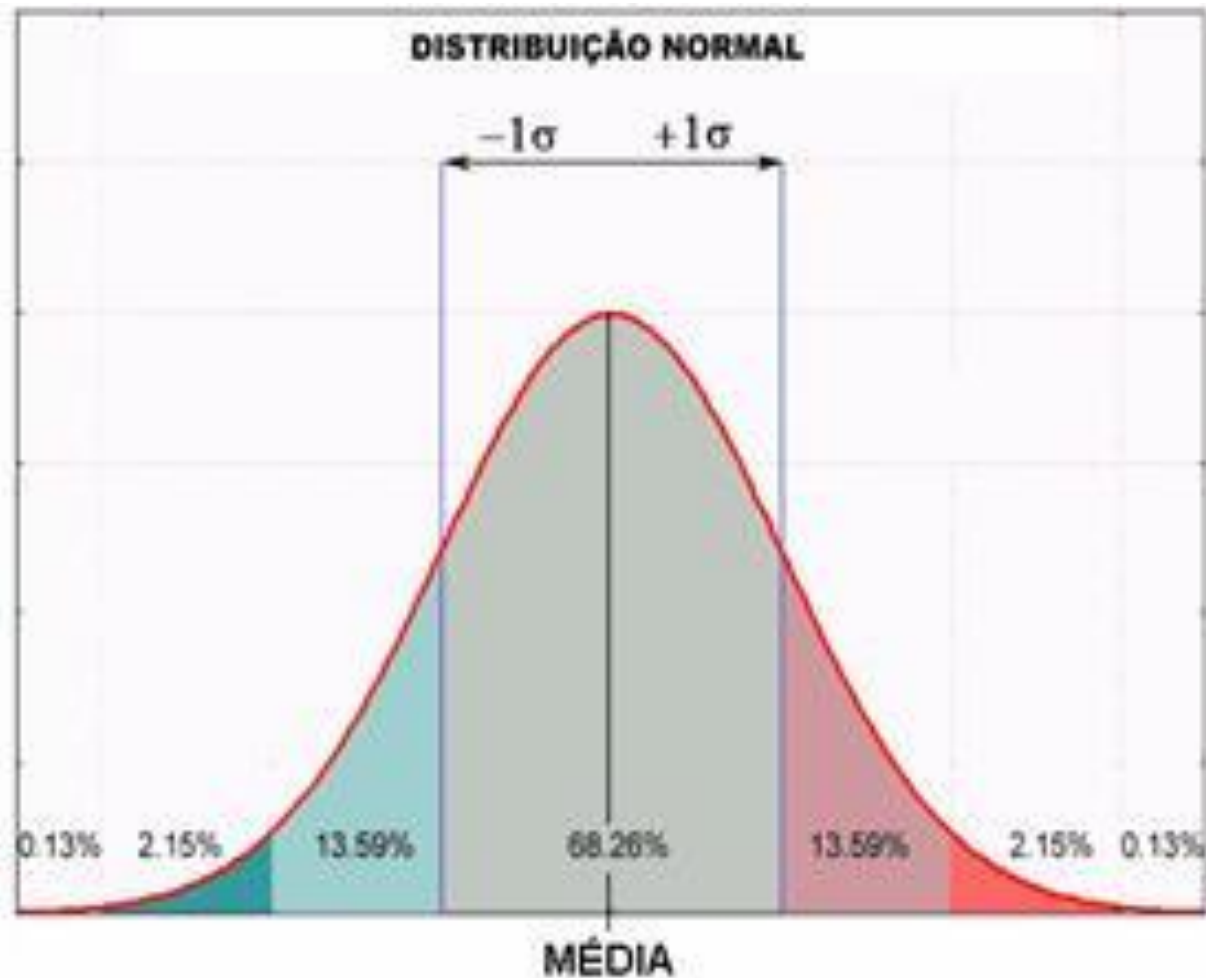
Tem dois pontos de inflexão situados nos pontos $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$.

Aprox. 68% dos valores de x situam-se no intervalo $(\mu - \sigma; \mu + \sigma)$.

Aprox. 95% dos valores de x situam-se no intervalo $(\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma)$.

Aprox. 99,7% dos valores de x situam-se no intervalo $(\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)$.

Características da Curva Normal



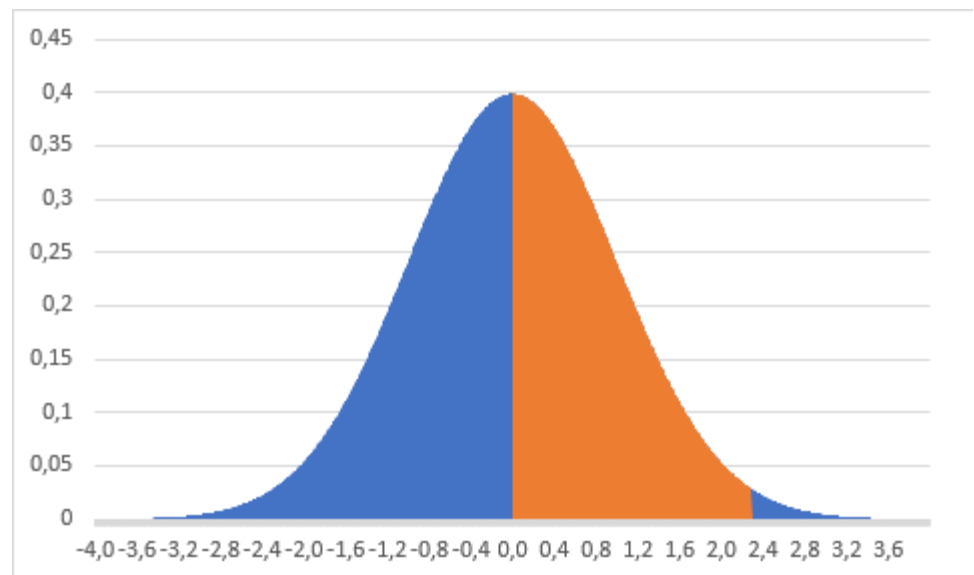
Exemplo: uso da tabela

Qual a área
correspondente a
valores de z entre 0 e
2,3?

Área sob a curva = 1

Na tabela:

área entre 0 e 2,3:
0,4893



Exemplo

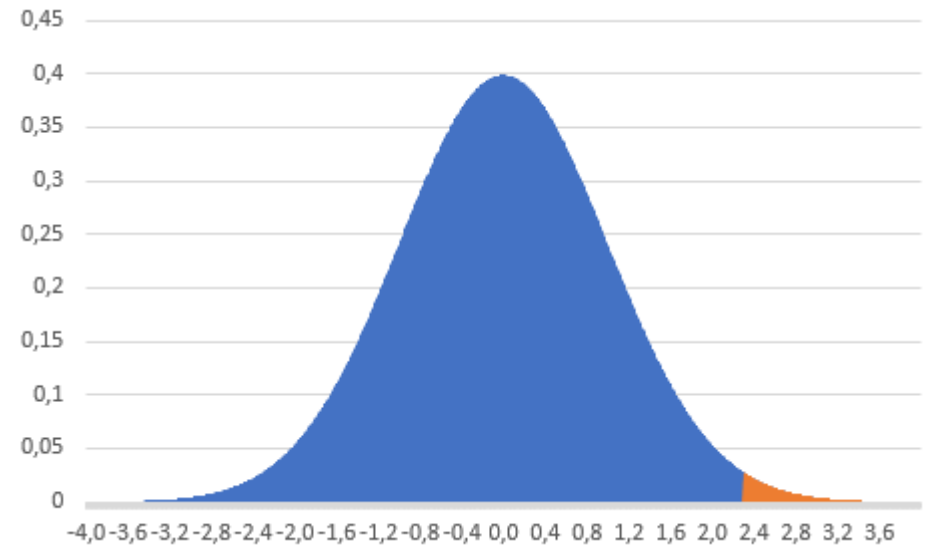
Qual a área
correspondente a valores
de z maiores que 2,3?

área sob a curva = 1

Área à direita de zero =
0,5

Na tabela: área entre 0 e
2,3: 0,4893

Área acima de 2,3 = $0,5 - 0,4893 = 0,0107$



Exemplo

Qual a área
compreendida entre $z = -1,5$ e $z = 1$?

Na tabela:

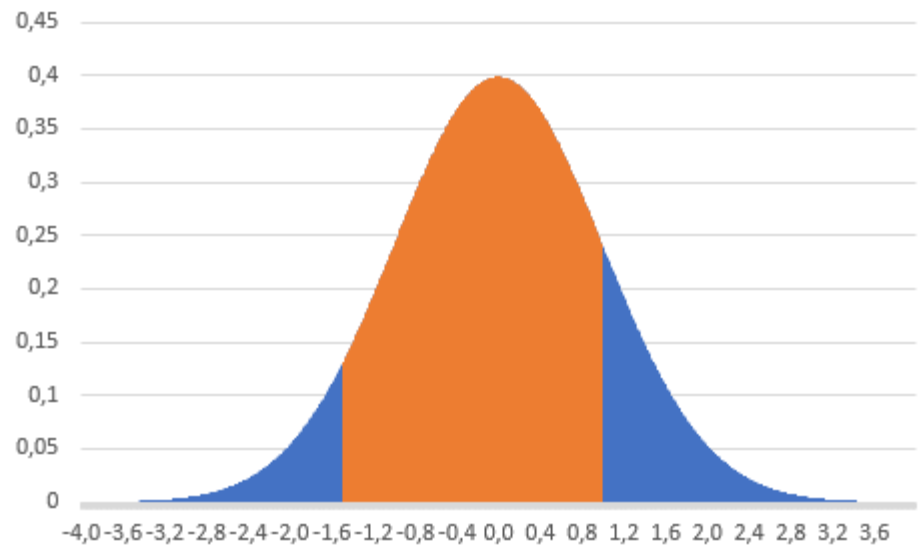
área entre $z=0$ e $z=1,5$:
0,4332

Na tabela:

área entre $z=0$ e $z=1$:
0,3413

Área desejada:

$0,4332 + 0,3413 = 0,7745$



Exemplo

Que valores de z limitam a região localizada na extremidade direita da curva normal correspondente a 20% da área total?

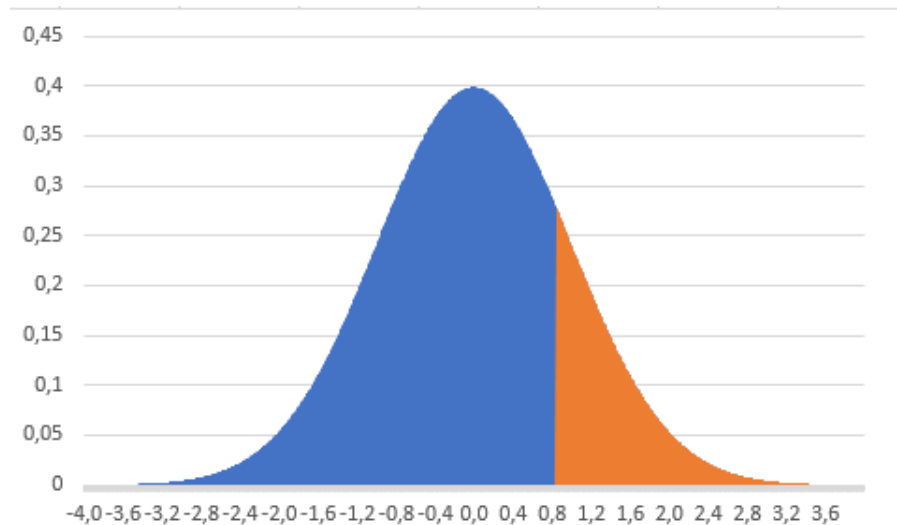
Na tabela:

$$50\% - 20\% = 30\%$$

Valor mais próximo: 0,2995

$$\rightarrow z=0,84$$

Portanto, $z = 0,84$ e $z \rightarrow +\infty$ delimitam a área considerada.



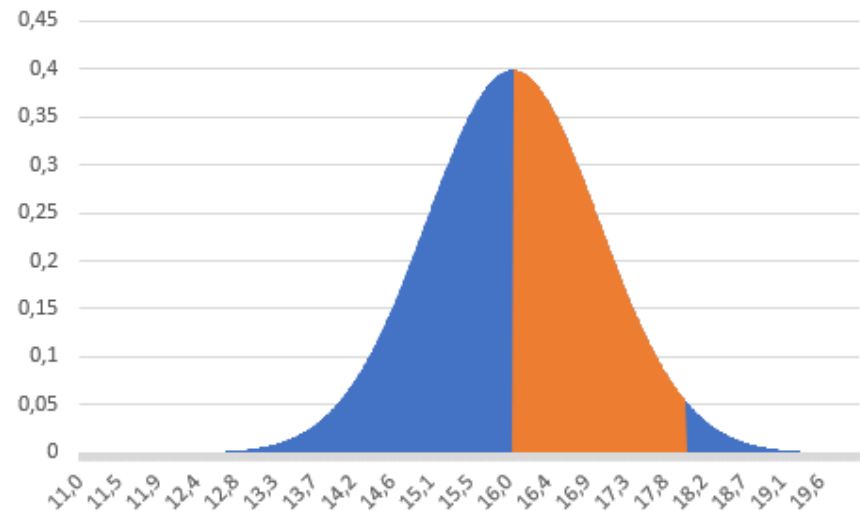
Exemplo

Em mulheres, a quantidade de hemoglobina por 100 mL de sangue é uma variável aleatória com distribuição normal de média 16 g e desvio padrão 1 g. Qual a probabilidade de uma mulher apresentar de 16 a 18 g de hemoglobina por 100 mL de sangue?

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \rightarrow Z = \frac{18 - 16}{1} = 2$$

Na tabela: 0,4772

Probabilidade: 47,72%



Exercício

As alturas de 10 000 alunos de um colégio têm distribuição aproximadamente normal, com média 170 cm e desvio padrão 5 cm.

- A) qual o número esperado de alunos com altura superior a 165 cm?
- B) qual o intervalo simétrico em torno da média que conterá 75% das alturas dos alunos?

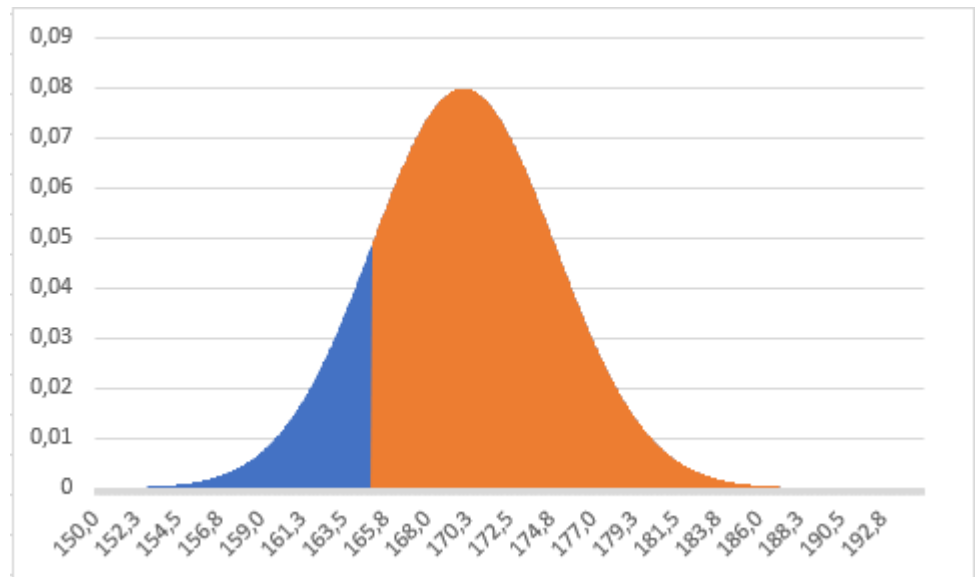
Solução

A) qual o número esperado de alunos com altura superior a 165 cm?

$$z = \frac{x-170}{5} \rightarrow z = \frac{165-170}{5} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$z = 1 \rightarrow A = 0,3413 \quad \text{Área total: } 0,5 + 0,3413 = 0,8413$$

$$\text{Resp.: } 0,8413 \cdot 10000 = \\ = 8413 \text{ alunos.}$$



Solução

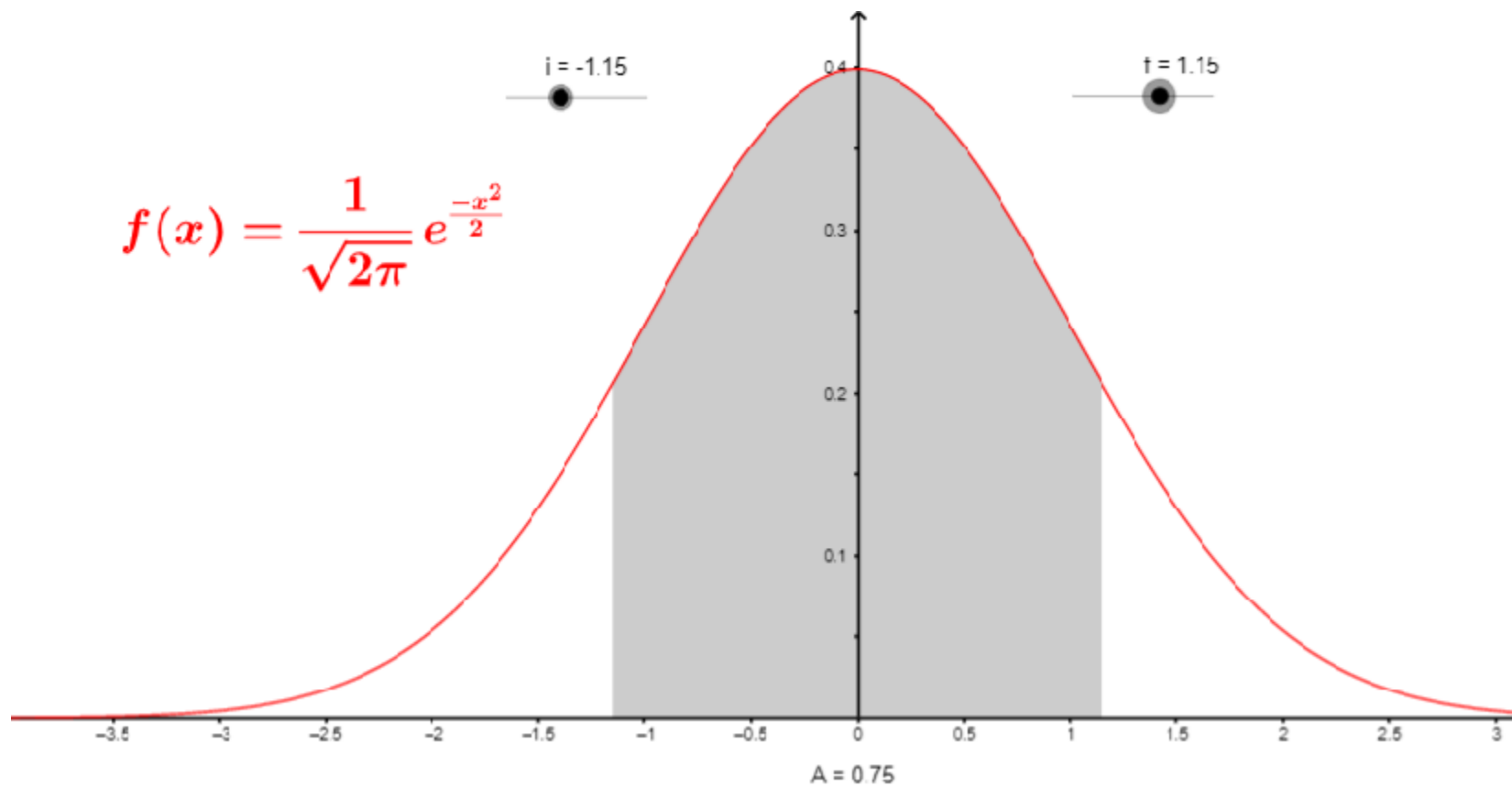
B) qual o intervalo simétrico em torno da média que conterá 75% das alturas dos alunos?

Queremos o intervalo $[x_1; x_2]$.

Temos que: $75\% = 0,75$.

$$0,75 : 2 = 0,375 \quad A=0,375 \rightarrow z=1,15$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$



Solução

$$\begin{aligned} \text{Para } z_1 = -1,15 \rightarrow z_1 &= \frac{x_1 - 170}{5} \rightarrow -1,15 = \frac{x_1 - 170}{5} \rightarrow \\ -5,75 &= x_1 - 170 \rightarrow x_1 = 170 - 5,75 = 164,25 \text{ cm.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } z_2 = 1,15 \rightarrow z_2 &= \frac{x_2 - 170}{5} \rightarrow 1,15 = \frac{x_2 - 170}{5} \rightarrow \\ 5,75 &= x_2 - 170 \rightarrow x_2 = 170 + 5,75 = 175,75 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Portanto: $[x_1; x_2] = [164,25; 175,75]$.